

1 Лекция первая

Основные понятия и определения теории автоматического управления. Классификация систем автоматического управления.

1.1 Введение

Что обозначает название курса: Теория Автоматического Управления?

Управление: изменение режима работы. Например, свет выключен — свет включён. Изменение состояния лампочки есть управление. Изначально вместо термина "управление" использовалось "регулирование"; изначально, да и в настоящее время, объектом науки является регулирование прохождения технических процессов.

Автоматическое: происходящее без участия человека. Этот момент принципиален: мы будем заниматься теорией устройств, которые не требуют вмешательства человека в процесс функционирования. Пример: обычный чайник на газовой плите *не* является автоматическим устройством, а современный электрический — является (он выключается сам, без участия человека, когда закипает).

Теория: дисциплина занимается математическим описанием устройств, а не конструкцией устройств, как таковых. То есть, конкретные устройства будут рассматриваться в качестве возможных примеров, но их техническая реализация лежит за пределами курса. Для нас основными объектами будут блок-схемы, уравнения, итд.

В курсе предполагается рассмотреть следующие вопросы:

1. Классификация систем управления
2. Дифференциальные уравнения, как способ описания САУ. Передаточные функции.
3. Частотные и временные характеристики элементарных звеньев и линейных систем.
4. Устойчивость САУ. Критерии устойчивости.
5. Показатели качества управления.

1.2 Краткий исторический экскурс

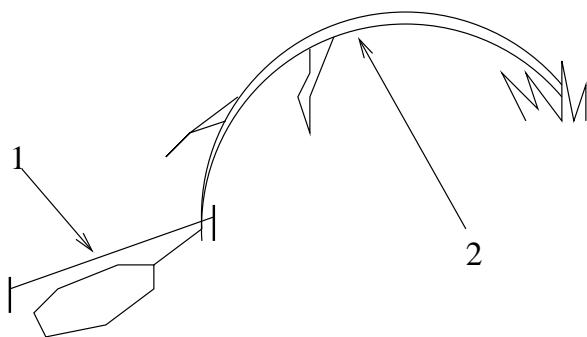


Рис. 1: Автоматическая ловушка

Первые автоматические устройства можно отнести ко временам первобытных людей. Уже тогда существовали устройства, производящие заданные действия без участия человека. К таким устройствам можно отнести изображённый на рисунке 1 механизм автоматического капкана-ловушки. В нём уже присутствуют такие части системы управления, как датчик (1) и исполнительный механизм (2).

Во времена египетских фараонов были созданы первые регуляторы уровня жидкости. Аналогичный механизм, известный под названием "поплавокный кран", используется в повседневной жизни (угадайте где).

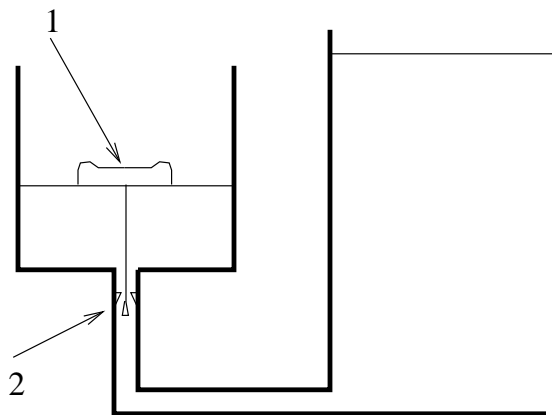


Рис. 2: Древнеегипетский поплавокный кран (1 - поплавок, 2 - клапан)

Особо остро встал вопрос создания регуляторов при создании высокоточных устройств, в первую очередь — часов. Даже небольшие возмущения приводили к неточности хода. На рубеже нашей эры арабы снабдили поплавокным регулятором уровня водяные часы. Гюйгенс в 1657 году построил в часы маятниковый регулятор хода.

Центробежные маятниковые регуляторы в средние века регулировали в зависимости от нагрузки ход водяных мукомольных мельниц.

Хотя автоматические регуляторы появились давно, они не повлияли на формирование техники и теории автоматического управления.

Развитие промышленных регуляторов началось на рубеже XVIII и XIX столетий, в эпоху промышленного переворота в Европе. В 1765 году И.И. Ползуновым построен поплавокный регулятор питания парового котла. В 1784 году Д. Уатт получил патент на центробежный регулятор скорости паровой машины.

Эти регуляторы открыли путь потоку предложений по принципам регулирования. В этот период появились регуляторы с воздействием по скорости (Сименс), по нагрузке (Понселе), сервомоторы с жесткой обратной связью (Фарко), регуляторы с гибкой обратной связью.

Паровая машина не случайно стала объектом для промышленных регуляторов так как обладала способностью неустойчиво работать. Это свойство машины приводило к тому, что разработанный регулятор зачастую оказывал обратное действие. В 1866 году Д. Максвелл в работе "О регуляторах" и И.А.Вышеградский "Об общей теории регуляторов"(1876) и "О регуляторах прямого действия"(1877) дали системный подход к проблеме и заложили основы новой науки.

В первые десятилетия XX века теория автоматического регулирования формируется как общетехническая дисциплина. В первой половине XX века разрабатываются критерии

устойчивости САУ.

Во второй половине XX века цикл работ Л.С.Понтрягина, А.М.Летова, Н.Н.Красовского, А.А.Фельдбаума создал основы теории оптимального управления. Эти достижения, в частности, способствовали успеху советской космической программы. С этого момента наука становится теорией автоматического управления и регулирования.

1.3 Функциональная схема САУ

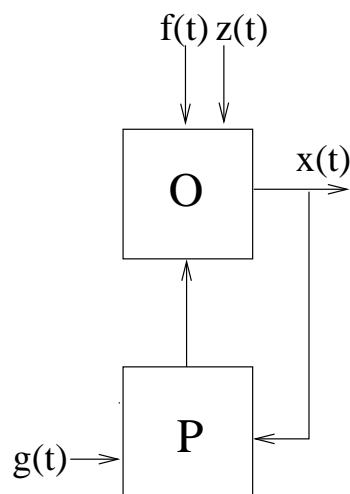


Рис. 3: Простейшая схема

На рисунке 3 изображена блок-схема устройства с обратной связью (такими мы и будем далее заниматься). O — объект регулирования, P — регулятор, $f(t)$ наблюдаемые (контролируемые) возмущения, $z(t)$ ненаблюдаемые (неконтролируемые) возмущения, $g(t)$ управляющие (входные) переменные, $x(t)$ выходные переменные.

Однако система управления может иметь и более сложную структуру, возможно с несколькими обратными связями. Пример такой (более сложной) системы приводится на рисунке 4. Вообще, блок-схемы являются промежуточным этапом между описанием конкретной САУ и её математической моделью (ближе к модели). На рисунке 4: 1 - задающее

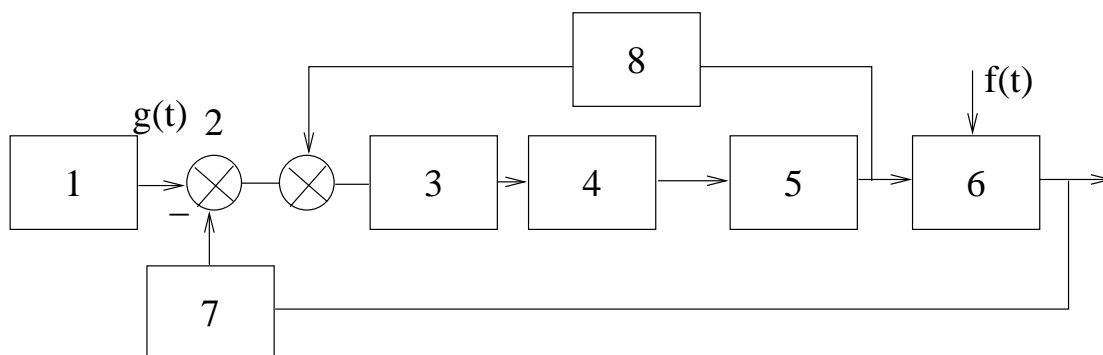


Рис. 4: Общая функциональная схема САУ

устройство, 2 - элемент сравнения, 3 - усилитель, 4 - последовательное корректирующее устройство, 5 - исполнительный механизм, 6 - объект, 7 - датчик, 8 - параллельное корректирующее устройство.

В этой современной схеме присутствуют два "доисторических" элемента — датчик и исполнительный механизм.

1.4 Классификация САУ

Системы управления классифицируются по многим разным показателям, характеризующим внутреннее устройство системы, её поведение, итд.

Прежде всего различают **разомкнутые** и **замкнутые** системы. В разомкнутых системах отсутствует обратная связь, а есть лишь задающее устройство (то есть в схеме на рисунке 3 отсутствует стрелка от выхода O на вход P). Разомкнутые системы могут в законе управления учитывать или не учитывать наблюдаемое возмущение $f(t)$. Во втором случае говорят об управлении **по возмущению**, а в первом — **по заданному воздействию**.

Однако больший интерес представляют **замкнутые** системы, те, в которых обратная связь присутствует.

Также системы управления классифицируются по закону управления. Различают следующие виды систем:

1. Системы стабилизации: управление направлено на поддержание **постоянного** значения выходной величины, то есть $x(t) = const$. Пример: поплавковый регулятор.
2. Системы программного регулирования: управление обеспечивает изменение значения выходной величины в соответствии с программой $x(t) = F(t)$, где $F(t)$ — заданная зависимость (программа). Пример: станок с заданной программой.
3. Следящие системы: управление обеспечивает изменение выходной величины в соответствии с зависимостью, которая неизвестна заранее. То есть $x(t) = F(t)$, но $F(t)$ заранее неизвестна. Пример: радиолокатор.

Поведение системы (объекта, регулятора, возмущения) обычно описывают функциями от времени. Режим работы системы, в котором все характеристики постоянны, называют *статическим* режимом. По поведению в статическом режиме (точнее по зависимости от внешних возмущений в статическом режиме) системы делят на **статические** и **астати-ческие**.

Проиллюстрируем эти два типа систем примером. Рассмотрим бак, уровень воды в котором регулируется поплавковым краном. Предполагается, что система настроена так, что при заданном уровне x_0 поплавков расположен таким образом, что клапан полностью закрыт. Тогда при отсутствии внешних возмущений ($f = 0$) система сохраняет заданный уровень воды x_0 в баке. Предположим теперь, что наблюдается постоянный отток воды из бака, то есть $f \neq 0$, но при этом постоянна. Очевидно, что равновесие при этом наступит в том случае, если через клапан будет поступать такое же количество воды, то есть $g = f$. Система управления устроена таким образом, что g пропорционально отклонению ϵ от заданного значения x_0 (коэффициент пропорциональности, кстати, определяется точкой закрепления рычага). А значит ненулевое g возможно только при ненулевом ϵ . Таким образом, при постоянном ненулевом возмущении f наша система управления обеспечивает

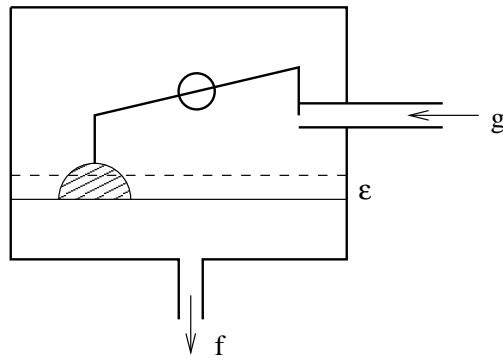


Рис. 5: Поплавковый регулятор: статическая система

уровень воды равный не x_0 , а $x_0 - \epsilon$. ϵ называется *статической ошибкой* системы. Изменяя закрепление рычага можно её уменьшить, но избавиться от неё нельзя. Такая система управления в статическом режиме может обеспечить заданный уровень лишь с некоторой ошибкой.

Преимущества такой системы в простоте конструкции и быстрой реакции на возмущения. Однако бывают случаи, когда наличие статической ошибки недопустимо. Тогда применяют астатические системы; модифицируем нашу систему так, чтобы её статическая ошибка равнялась нулю. В наш поплавок регулятор введём астатическое звено —

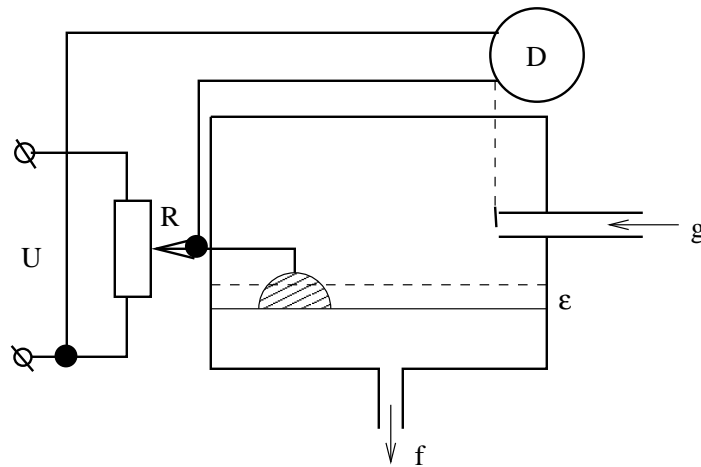


Рис. 6: Поплавковый регулятор: астатическая система

двигатель, управляющий клапаном. В такой системе уже возможно "зафиксировать" клапан в открытом положении даже при $\epsilon = 0$. Это и произойдёт при наличии постоянного возмущения f . В зависимости от отклонения ϵ теперь изменяется "скорость движения" клапана, но не его положение. При $\epsilon = 0$ клапан зафиксируется; если же в системе появится отклонение от заданного уровня, положение клапана будет изменено соответствующим образом.

Дальнейшая классификация систем уже связана со способом их математического описания: различают **линейные** и **нелинейные** системы, а также **одномерные** и **многомерные**, в зависимости от того, какими уравнениями описывается математическая модель

системы.

К классификации стоит добавить ещё отдельный класс **самоастроивающихся** или **адаптивных** систем. Это одно из наиболее перспективных направлений в теории автоматического управления, в рамках него в настоящее время разрабатываются регуляторы на основе технологий, известных как ИИ.

2 Лекция вторая

Дифференциальные уравнения. Линеаризация. Преобразование Лапласа и его основные свойства.

2.1 Дифференциальные уравнения

Кроме рассмотренных выше статических режимов работы, рассматриваются динамические режимы работы; они то и представляют наибольший интерес. Процессы в САУ и её поведение в динамике чаще всего описывают дифференциальными уравнениями (как и большинство физических и технических процессов). Традиционно ограничиваются уравнениями второго порядка (и практика показывает, что это оправдано). Итак, пусть САУ описывается уравнением вида:

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, g, \dot{g}, f) = 0$$

где x выходная переменная, g входная переменная (управляющее воздействие), f контролируемое возмущение. Все упомянутые переменные являются функциями от времени t (а точки обозначают дифференцирование по времени).

Если входные величины постоянны, а система устойчива, то есть система не изменяется сама по себе, под влиянием каких-то внутренних причин, уравнение превращается в описание статического режима системы:

$$F(x_0, 0, 0, g_0, 0, f_0) = 0$$

Такое уравнение алгебраическое и выражает зависимость между x_0, g_0, f_0 в статическом режиме. Рассматривая, например f_0 как параметр, мы можем построить семейство графиков (при разных значениях f_0), выражающих зависимости x_0 от g_0 — они называются *статическими характеристиками* системы.

2.2 Линеаризация

Практически все системы описываются нелинейными уравнениями. Однако в некоторых пределах поведение систем можно считать близким к линейным и заменить описывающие их уравнения на линейные. Такой переход называется **линеаризацией**. Рассмотрим способ проведения линеаризации произвольного уравнения.

Будем рассматривать поведение системы в окрестности точки (x_0, g_0, f_0) . Тогда каждую из переменных можно выразить через отклонение от этой точки:

$$x = x_0 + \Delta x, g = g_0 + \Delta g, f = f_0 + \Delta f$$

Тогда производные x и g запишутся следующим образом:

$$\dot{x} = \dot{\Delta x}, \ddot{x} = \ddot{\Delta x}, \dot{g} = \dot{\Delta g}$$

Эти выражения подставляем в уравнение системы. В силу предположения о малости отклонений, мы можем разложить F в ряд Тейлора по всем отклонениям в окрестности точки (x_0, g_0, f_0) .

$$\begin{aligned}
& F_0 + \frac{\partial F}{\partial x}|_0 \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_0 \Delta x^2 + \dots \\
& + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_0 \dot{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2}|_0 \dot{\Delta x}^2 + \dots \\
& + \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}|_0 \ddot{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \ddot{x}^2}|_0 \ddot{\Delta x}^2 + \dots \\
& + \frac{\partial F}{\partial g}|_0 \Delta g + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial g^2}|_0 \Delta g^2 + \dots \\
& + \frac{\partial F}{\partial \dot{g}}|_0 \dot{\Delta g} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{g}^2}|_0 \dot{\Delta g}^2 + \dots \\
& + \frac{\partial F}{\partial f}|_0 \Delta f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial f^2}|_0 \Delta f^2 + \dots = 0
\end{aligned}$$

Далее производится стандартный приём: малые второго порядка отбрасываются, так как они ещё более малы, чем уже малые отклонения. В результате получаем уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}|_0 \ddot{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}|_0 \dot{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial x}|_0 \Delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{g}}|_0 \dot{\Delta g} + \frac{\partial F}{\partial g}|_0 \Delta g + \frac{\partial F}{\partial f}|_0 \Delta f = 0$$

Все частные производные являются постоянными (так как они взяты в точке (x_0, g_0, f_0)), а значит уравнение переписывается в виде

$$a_0 \ddot{\Delta x} + a_1 \dot{\Delta x} + a_2 \Delta x - b_0 \dot{\Delta g} - b_1 \Delta g - c_0 \Delta f = 0$$

Геометрически линеаризация заключается в замене зависимости F (нелинейной) на касательную в точке.

2.3 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа используется для переписывания дифференциальных уравнений в более удобном для рассмотрения виде. Фактически это замена специального вида; заменяются неизвестные функции, а уравнение на "новые" функции принимает несколько другой вид.

Определение Прямое преобразование Лапласа определяется соотношением:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Оно задаёт соответствие между функцией $x(t)$ (оригиналом) и $X(s)$ (образом). t — действительная переменная (в нашем случае обычно время), $s = \sigma + j\omega$ — комплексная переменная.

Пишут $X(s) = L\{x(t)\}$.

Определение Обратное преобразование Лапласа задаётся соотношением

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} e^{st} X(s) ds$$

Пишут $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$.

Преобразование Лапласа возможно если

1. $x(t)$ определена и кусочно-дифференцируема на положительной полуоси.
2. $x(t) = 0$ при $t < 0$.
3. Существуют такие положительные M и C , что $|x(t)| \leq Me^{Ct}$ при $0 \leq t \leq \infty$.

2.4 Свойства преобразования Лапласа

1. **Линейность:** во-первых, $L\{x_1(t) + x_2(t)\} = L\{x_1(t)\} + L\{x_2(t)\} = X_1(s) + X_2(s)$, во-вторых, $L\{\alpha x(t)\} = \alpha L\{x(t)\} = \alpha X(s)$.
2. **Дифференцирование оригинала:** $L\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0)$. Для производной более высокого порядка имеет место выражение $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$. Если все производные до $(n-1)$ -ой у $x(t)$ равны нулю, то $L\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s)$.
3. **Интегрирование оригинала:**

$$L\left\{\int_0^t x(t) dt\right\} = \frac{1}{s} X(s)$$

4. **Теоремы о предельных значениях:**

$$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

Если существует конечный предел $x(\infty)$, то он равен

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

5. **Теорема запаздывания:** для любого положительного τ имеет место $L\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} X(s)$.
6. **Теорема подобия (изменения масштаба):** $L\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
7. **Теорема о свёртке:** $X_1(s)X_2(s) = L\left\{\int_0^t x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau\right\}$.

8. Теорема разложения: Если $X(s)$ представимо в виде $\frac{A(s)}{B(s)}$ (степень $B(s)$ больше степени $A(s)$) то имеет место разложение

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{A(s)}{B(s)}\right\} = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (X(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st})|_{s_k}$$

где s_k корни $B(s)$, n_k их кратности, l число различных корней.

Пример: $X(s) = \frac{1}{s^2}$. Имеет один корень $s_1 = 0$ кратности $n_1 = 2$. Следовательно, $x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left(\frac{s^2}{s^2} e^{st}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} t e^{st} = t$.

2.5 Дифференциальные уравнения и преобразование Лапласа

Применяя преобразование Лапласа к нашему уравнению системы (при нулевых начальных условиях), получим:

$$a_0 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_2 X(s) = b_0 s G(s) + b_1 G(s) + c_0 F(s)$$

То есть

$$(a_0 s^2 + a_1 s + a_2) X(s) = (b_0 s + b_1) G(s) + c_0 F(s)$$

3 Лекция третья

Основные способы математического описания линейных систем автоматического управления. Передаточные функции. Частотные и временные характеристики.

3.1 Операторная форма записи уравнений

Рассматривается система, описываемая уравнением

$$a_0 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = b_0 \dot{g} + b_1 g + c_0 f$$

Введём обозначение для оператора дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$. Тогда $\frac{d^2}{dt^2} = p^2$. Наше уравнение можно переписать в виде:

$$a_0 p^2 x + a_1 p x + a_2 x = b_0 p g + b_1 g + c_0 f$$

В этом уравнении p уже можно рассматривать почти как обычный множитель. "Почти", потому что он не коммутирует с x , то есть $px \neq xp$. Но за скобки его можно выносить и с обычными числами (а не функциями) он перестановочен:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) x = (b_0 p + b_1) g + c_0 f$$

Эта форма записи очень напоминает запись в изображениях, полученную в конце предыдущей лекции. В ней только надо p заменить на s , а функции на их изображения (следует помнить, что такая форма записи в изображениях верна **только** при нулевых начальных условиях).

Операторы можно умножать на числа и складывать, поэтому $a_0 p^2 + a_1 p + a_2$ это тоже оператор. Обозначим его $D(p)$, он называется *собственным* оператором. Аналогично $b_0 p + b_1$ обозначим за $B(p)$, а c_0 за $C(p)$. $B(p)$ и $C(p)$ называются операторами *воздействия*. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$D(p)x = B(p)g + C(p)f$$

3.2 Передаточные функции

Определение Передаточной функцией называется отношение оператора воздействия к собственному оператору.

В случае рассматриваемого нами уравнения можно ввести две передаточные функции $W_1(p) = \frac{B(p)}{D(p)}$ и $W_2(p) = \frac{C(p)}{D(p)}$. С использованием этих обозначений, уравнение можно переписать в виде:

$$x = W_1(p)g + W_2(p)f$$

Такая форма записи, в частности, объясняет название "передаточная функция": эта функция (точнее оператор) показывает каким образом входной сигнал преобразуется в выходной. То есть, на вход элемента подаются сигнал g и возмущение f , элемент их преобразует в соответствии с передаточными функциями $W_1(p)$ и $W_2(p)$ и на выходе выдаёт сумму.

Передаточные функции можно записывать не только в операторной форме, но и в форме изображений Лапласа. При использовании такого способа, наше уравнение примет вид:

$$X(s) = W_1(s)G(s) + W_2(s)F(s)$$

Как уже говорилось, при нулевых начальных условиях, операторная форма записи совпадает с записью в изображениях если заменить p на s .

Далее мы будем чаще всего оперировать с передаточными функциями в форме изображений.

3.3 Частотные характеристики

Для исследования реальных (а не только модельных) систем управления необходим способ получения информации о том, как себя "ведёт" то или иное звено системы управления. Таким способом является построение частотных характеристик: с одной стороны они поддаются теоретическому исследованию (то есть можно по модели построить частотные характеристики и показать связь с параметрами модели), с другой стороны их можно получить в реальной системе управления, подав на вход гармонический сигнал и проанализировав выход.

Для начала рассмотрим модель и определим частотные характеристики для неё. Пусть звено описывается уравнением (в операторной форме)

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n)x = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m)g$$

Тогда соответствующая передаточная функция (в форме изображений) имеет вид:

$$W(s) = \frac{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}$$

Частотная передаточная функция получается из $W(s)$ подстановкой вместо комплексной переменной s мнимой переменной $j\omega$ (здесь ω — действительное число).

$$W(j\omega) = \frac{a_0j\omega^n + a_1j\omega^{n-1} + \dots + a_n}{b_0j\omega^m + b_1j\omega^{m-1} + \dots + b_m}$$

Теперь $W(j\omega)$ является функцией от ω , принимающей комплексные значения. Её можно представить как

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

Как известно, $U(\omega)$ и $V(\omega)$ связаны с $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$ следующим образом:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

$$\phi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} + n \frac{\pi}{2}$$

(n — целое); $A(\omega)$ называется модулем W , а $\phi(\omega)$ — аргументом W .

Функция $W(\omega)$ задаёт вектор на комплексной плоскости. При изменении частоты конец этого вектора будет перемещаться, описывая некоторую кривую. Кривая, получающаяся при прохождении ω всех значений от 0 до ∞ называется *амплитудно-фазовой частотной характеристикой* (АФЧХ).

Однако, очень часто более удобным представляется построение не кривой на комплексной плоскости а графиков функций. Поэтому от рассмотрения $W(\omega)$ переходят к рассмотрению $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$. Это уже действительные функции действительного переменного.

График $A(\omega)$ называется *амплитудной частотной характеристикой*. График $\phi(\omega)$ называется *фазовой частотной характеристикой*.

Зачастую приходится строить АЧХ и ФЧХ для сложных систем, передаточные функции которых являются произведением других более простых передаточных функций. Поэтому от обычных частотных характеристик переходят к логарифмическим (складывать две функции проще, чем умножать). *Логарифмической амплитудной частотной характеристикой* называется график функции

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

Аналогично, *логарифмическая фазовая частотная характеристика* есть график функции $\phi(\omega)$ в зависимости от $\lg \omega$.

Построение этих графиков производится в специальной системе координат с логарифмическим масштабом. Единицей измерения $L(\omega)$ является *децибел*, а единицей измерения $\lg \omega$ — *декада* (сдвиг на одну декаду соответствует изменению частоты ω в 10 раз; при этом на оси принято подписывать значения самой частоты ω , а не её логарифма).

3.4 Физический смысл частотных характеристик

Рассмотрим реакцию системы на подачу в качестве входного сигнала $g = g_m \cos \omega t$. При подстановке такой функции g в уравнение звена, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение. Как известно, его решение представляется в виде $x(t) = x_c(t) + x_b(t)$, где $x_c(t)$ общее решение соответствующего однородного уравнения, а $x_b(t)$ частное решение неоднородного уравнения.

Для тех систем, которые являются устойчивыми (о том, что такое устойчивость будет рассказано позднее), $x_c(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (то есть свободные движения сходят на нет). Поэтому для таких систем существенной является вынужденная компонента $x_b(t)$. Для того, чтобы определить её, представим входное значение в виде:

$$g = g_m \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \frac{g_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{g_m}{2} e^{-j\omega t} = g_1 + g_2$$

В силу линейности уравнения, можно искать решение $x_b = x$ в виде суммы $x_1 + x_2$, где x_1 решение при g_1 , а x_2 решение при g_2 .

Заметим, что оператор дифференцирования p действует на g_1 и g_2 следующим образом $pg_1 = j\omega g_1$, $pg_2 = (-j\omega)g_2$.

Оказывается, что частные решения можно искать в виде $x_1 = A_1 g_1$, $x_2 = A_2 g_2$, где A_1 и A_2 не зависят от времени. При подстановке таких функций вместо x в уравнение (при соответствующей подстановке g_i), получаем, что

$$A_1 = W(j\omega), A_2 = W(-j\omega)$$

Так как $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$, то для x_1 и x_2 можно записать следующие выражения:

$$x_1 = A(\omega) \frac{g_m}{2} e^{j(\omega t + \phi(\omega))}$$

$$x_2 = A(\omega) \frac{g_m}{2} e^{-j(\omega t + \phi(\omega))}$$

Складывая, получаем $x = A(\omega)g_m \cos(\omega t + \phi(\omega))$. Таким образом получается, что АЧХ и ФЧХ показывают, соответственно, как изменяется амплитуда и фаза гармонического сигнала внутри звена.

3.5 Временные характеристики

Кроме реакции на гармоническое воздействие, рассматриваются также реакции на переходный и импульсный сигнал. Эти реакции называются *временными характеристиками*.

Переходным сигналом (переходной функцией) называется функция вида:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0 \\ 0, & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

Реакция системы (её выходной сигнал) при подаче на вход переходной функции называется *переходной характеристикой системы*.

Кроме переходного импульсного сигнала рассматривается импульсный сигнал, так называемая дельта-функция. Она не является функцией в обычном смысле слова и изучается в теории обобщённых функций. Однако в нашем случае достаточно ограничиться некоторыми её свойствами, не углубляясь в теорию. Дельта-функцию будем обозначать $\delta(t)$.

Свойства $\delta(t)$:

1. $\dot{1}(t) = \delta(t)$
2. $\int_{-a}^a \delta(t) dt = 1$
3. $\int_{-a}^a \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0)$

Из этих свойств можно вывести "поведение" производной $\delta(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \dot{\phi}(t) dt = -\dot{\phi}(0)$$

Для преобразования Лапласа дельта функции можно получить следующие равенства:

$$L\{\delta(t)\} = 1, L\{\dot{\delta}(t)\} = s, L\{\delta^{(m)}(t)\} = s^m$$

Весовой функцией $w(t)$ называется реакция системы на подачу на вход $\delta(t)$. В изображениях наша система описывается уравнением $X(s) = W(s)G(s)$. Из этой записи подстановкой вместо $G(s) L\{\delta(t)\} = 1$ получаем, что

$$L\{w(t)\} = W(s)$$

Из свойств преобразований Лапласа, кстати, получаем, что весовая функция полностью содержит в себе описание поведения системы при любом входном воздействии, так как

$$x(t) = \int_0^{\infty} w(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

4 Лекция четвёртая

Элементарные звенья и их характеристики. Структурные схемы стационарных линейных систем управления.

4.1 Разложение передаточных функций

Рассмотрим два объекта с передаточными функциями $W_1(s)$ и $W_2(s)$, соединённые последовательно. То есть, пусть выход первого объекта соединён со входом второго. Уравнение первого объекта $X_1(s) = W_1(s)G(s)$, уравнение второго $X(S) = W_2(s)X_1(s)$. Подставляя первое во второе получим

$$X(S) = W_1(S)W_2(S)G(S)$$

То есть передаточная функция всего объекта как целого получается перемножением передаточных функций его составляющих частей. Это верно для произвольного количества последовательно соединённых звеньев.

С другой стороны до сих пор передаточные функции у нас были дробно-рациональные (то есть отношения двух многочленов). Но из алгебры известно, что действительных многочлен любой степени можно разложить на множители не выше второй степени. То есть, любую передаточную функцию можно "разобрать" на простые составляющие части. Таких составляющих частей немного, и мы далее займёмся исследованием их свойств.

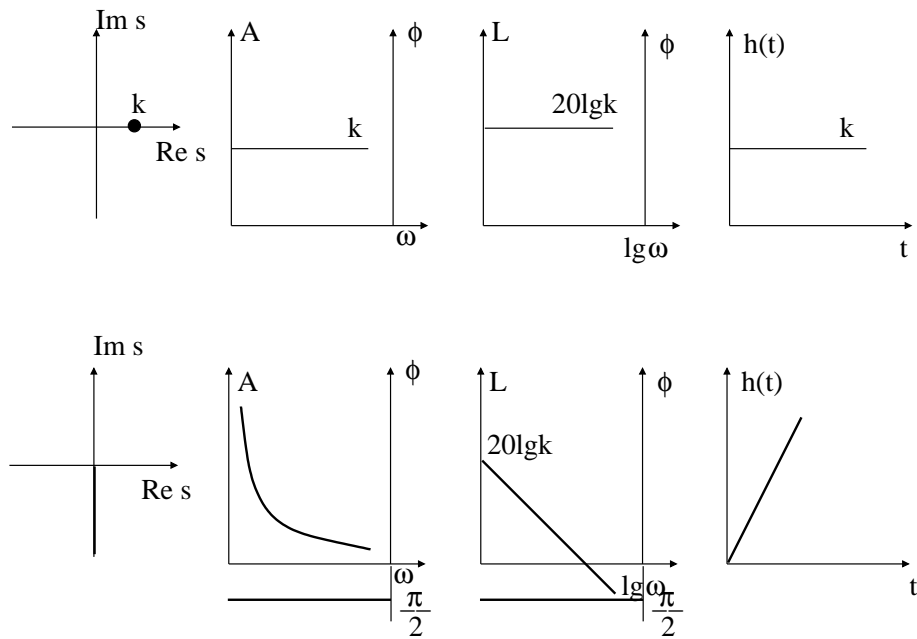
4.2 Элементарные звенья

4.2.1 Безинерционное звено

$$W(s) = k, x = kg$$

$$W(j\omega) = k, U = k, V = 0, A = k, \phi = 0, L = 20 \lg k$$

$$h(t) = k \cdot 1(t), w(t) = h(t) = k\delta(t)$$



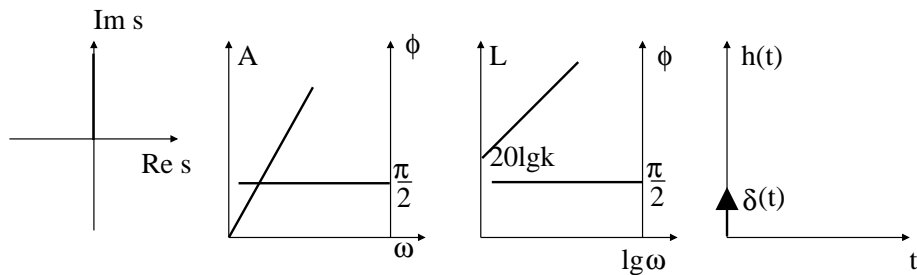
4.2.2 Интегрирующее звено

$$W(s) = \frac{k}{s}, \dot{x} = g$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -\frac{kj}{\omega}, U = 0, V = -\frac{k}{\omega}, A = \frac{k}{\omega}, \phi = -\frac{\pi}{2}, L = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

$$h(t) = 1(t), \dot{h}(t) = t, w(t) = 1(t)$$

4.2.3 Дифференцирующее звено



$$W(s) = ks, x = k\dot{g}$$

$$W(j\omega) = jk\omega, U = 0, V = k\omega, A = k\omega, \phi = \frac{\pi}{2}, L = 20 \lg k + 20 \lg \omega$$

$$h(t) = k1(t) = k\delta(t), w(t) = h(t) = \delta(t)$$

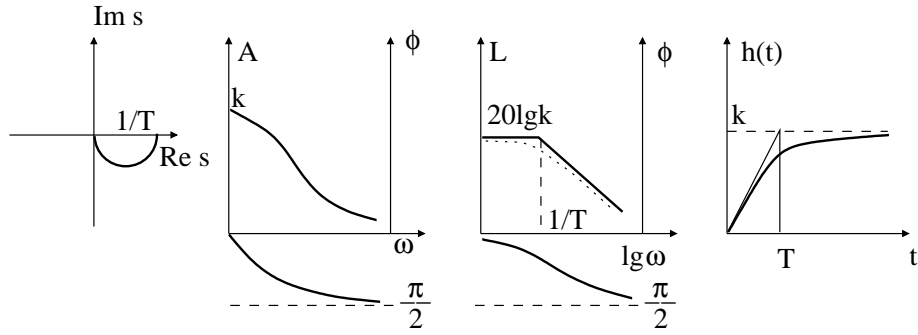
4.2.4 Аperiodическое звено

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}, T\dot{x} + x = kg$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(1-Tj\omega)}{(T\omega)^2+1}$$

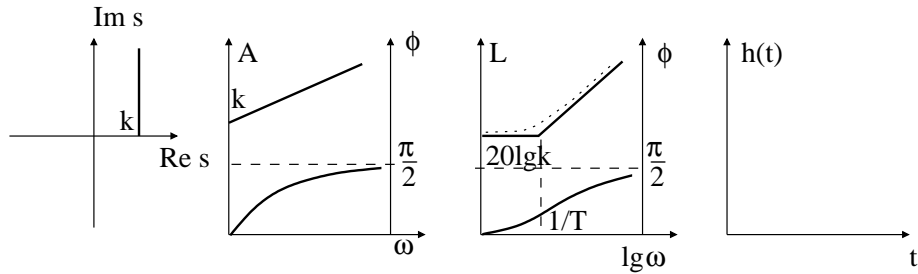
$$U = \frac{k}{(T\omega)^2+1}, V = -\frac{kT\omega}{(T\omega)^2+1}, A = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}$$

$$\phi = \arctg T\omega, L = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2+1}$$



$$T\dot{h}(t) + h(t) = k1(t), h(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right), w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

4.2.5 Форсирующее звено



$$W(s) = k(Ts + 1), x = k(T\dot{g} + g)$$

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1), U = k, V = kT\omega, A = k\sqrt{(T\omega)^2 + 1}, \phi = \text{arctg}T\omega$$

$$L = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{(T\omega)^2 + 1}$$

$$h(t) = k(T1(t) + 1(t)) = k(\delta(t) + 1(t)), w(t) = k(\delta(t) + \delta(t))$$

4.3 Звенья второго порядка

Некоторые из звеньев второго порядка сводятся к произведению двух звеньев первого, однако есть и такие, для которых это невозможно. Квадратичная часть передаточной функции будет записываться как $T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$, где ξ называется коэффициентом демпфирования. При $\xi \geq 1$ такой многочлен раскладывается на множители, поэтому этот случай нас интересовать не будет.

4.3.1 Колебательное звено

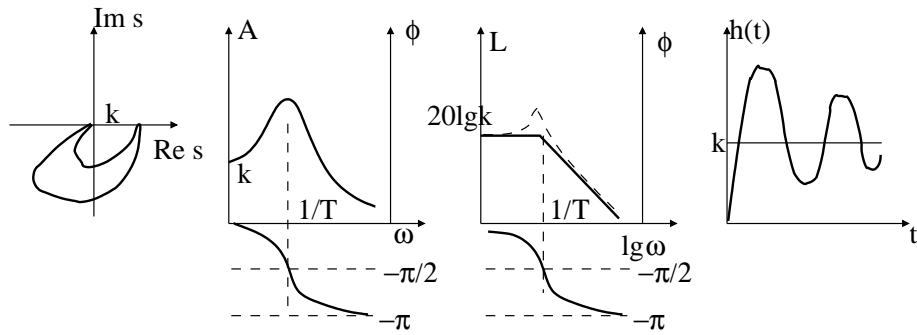
$$W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}, \text{ где } 0 < \xi < 1.$$

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1 - (T\omega)^2) + j2\xi T\omega}$$

$$U = \frac{k(1 - (T\omega)^2)}{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

$$V = \frac{2\xi T\omega k}{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

$$A = \frac{k}{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

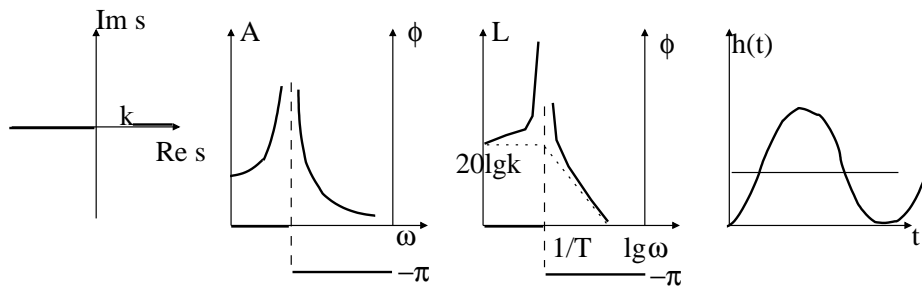


$$\phi = \begin{cases} -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}, \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{1-(T\omega)^2}, \omega > \frac{1}{T} \end{cases}$$

$$L = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{(1 - (T\omega)^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$$

4.3.2 Консервативное звено

Для консервативного звена приведём только передаточную функцию и графики характеристик. Вывод предлагается сделать самостоятельно. $W(s) = \frac{k}{(Ts)^2 + 1}$



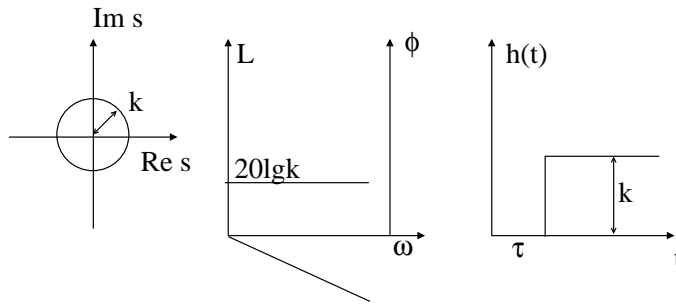
Кроме уже упомянутых звеньев второго порядка, возможны ещё случаи форсирующего и аperiodического звена второго порядка; при этом у формирующего звена второго порядка возможен случай $\xi < 1$. Собственно это и есть единственный случай, который необходимо разобрать (так как в двух других случаях звенья представляются в виде произведения звеньев первого порядка). Этот случай, однако, не представляет особой сложности и вполне доступен для самостоятельного изучения.

4.4 Звено чистого запаздывания

Кроме уже рассмотренных звеньев, передаточные функции которых дробно-рациональны, на практике встречается ещё одно звено, передаточная функция которого, не представляется в виде отношения многочленов. Тем не менее, с одной стороны, его свойства достаточно просты, а с другой стороны, оно достаточно часто встречается в реально существующих системах. Это так называемое звено чистого запаздывания.

Его передаточная функция имеет вид:

$W(s) = ke^{-\tau s}$ Учитывая свойства преобразования Лапласа, в терминах оригиналов уравнение записывается как $x(t) = g(t - \tau)$ (то есть такое звено описывает "задержку" сигнала длины τ)



$$\begin{aligned}
 W(\omega) &= k e^{-\tau j \omega}, \quad U(\omega) = k \cos \tau \omega, \quad V(\omega) = -k \sin \tau \omega \\
 A(\omega) &= k, \quad \phi(\omega) = -\tau \omega \\
 L(\omega) &= 20 \lg k, \quad h(t) = k 1(t - \tau)
 \end{aligned}$$

4.5 Структурные схемы и их преобразования

Как уже отмечалось, последовательное соединение элементов приводит к перемножению их передаточных функций $w = w_1 w_2 w_3$. Другим возможным вариантом соединения явля-

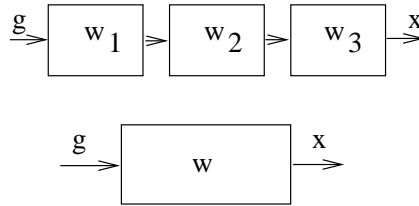


Рис. 7: Последовательное соединение звеньев

ется параллельное соединение с использованием сумматоров (соответственно названию, они суммируют то, что получают на входе и выдают сумму на выходе) $w = w_1 + w_2 + w_3$. Третьей комбинацией является звено, охваченное обратной связью. В этом случае получе-

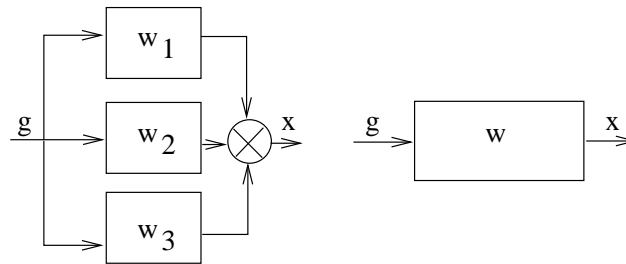


Рис. 8: Параллельное соединение звеньев

ние передаточной функции системы в целом не столь очевидно (сумматор с закрашенным сектором обозначает вычитание вместо суммирования — чаще всего встречается именно управление по отклонению).

Итак, представленная схема с обратной связью может быть описана следующим соотношением:

$$x = W \cdot (g - x)$$

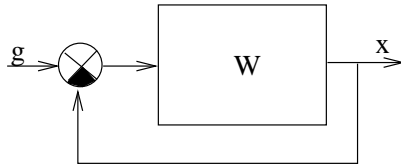
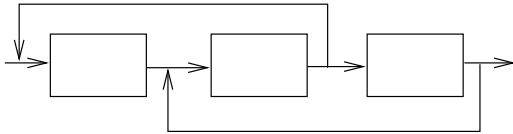


Рис. 9: Обратная связь, охватывающая звено

Преобразовывая, получим $x = Wg - Wx$, откуда $x(1+W) = Wg$. Следовательно, $x = \frac{W}{1+W}g$. А эта запись и обозначает, что передаточной функцией всей системы в целом будет $\frac{W}{1+W}$. В случае положительной обратной связи вместо знака $+$ в знаменателе будет стоять знак $-$.

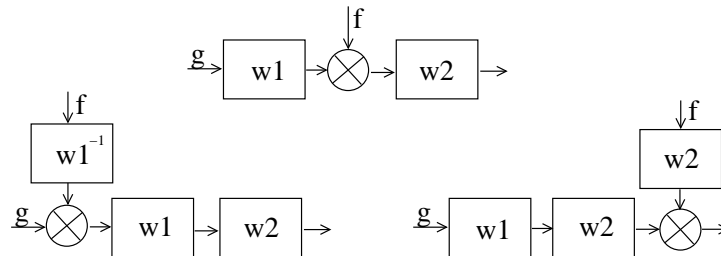


Однако, возможность устанавливать в системе сложные (например перекрещивающиеся) обратные связи приводит к тому, что передаточную функцию системы далеко не всегда можно получить комбинируя передаточные функции звеньев теми тремя способами,

которые указаны выше.

Для того, чтобы получать передаточные функции сложных систем их схемы преобразуются так, чтобы свойства системы сохранялись, а сложности с выписыванием передаточной функции пропадали. Рассмотрим такие преобразования.

4.5.1 Перенос сумматора



Три изображённые на рисунке фрагмента схемы описывают на самом деле одну и ту же систему. В этом несложно убедиться. На выходе в первом случае имеем $W_2(W_1g + f) = W_2W_1g + W_2f$.

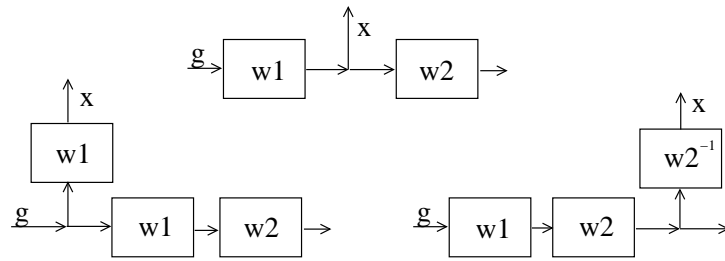
Во втором случае: $W_2W_1(g + W_1^{-1}f) = W_2W_1g + W_2f$.

В третьем случае: $W_2W_1g + W_2f$.

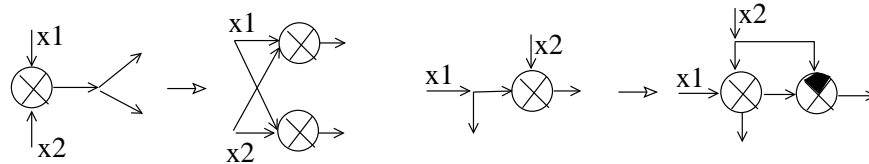
Как видим, все три передаточные функции совпадают, поэтому такие преобразования дают эквивалентные системы.

4.5.2 Перенос узла

Как легко заметить, перенос узла через звено в каком-то смысле двойственен переносу сумматора. Аналогичные предыдущему пункту проверки показывают, что эти преобразования дают действительно эквивалентные системы.



4.5.3 Перестановки узлов и сумматоров



Естественным следствием свойств узлов и сумматоров является то, что два сумматора, идущих подряд, можно поменять местами. То же верно и для двух идущих подряд узлов.

Случаи перестановки узла и сумматора несколько сложнее (зато реже встречаются). Преобразования схем показаны на рисунке.

5 Лекция пятая

Вычисление передаточных функций для многоконтурных систем. Построение ЛАЧХ и ЛФЧХ сложных систем.

5.1 Общие положения

У одной и той же системы может быть, вообще говоря, несколько разных передаточных функций. Всё зависит от того, что считать входным сигналом, а что выходным. Передаточная функция же показывает каким образом система преобразует входной сигнал в выходной.

Для того, чтобы вычислить ту или иную передаточную функцию необходимо преобразовать систему к такому виду, в котором её передаточная функция вычисляется с использованием свойств последовательного и параллельного соединения звеньев, а также соединения с обратной связью.

5.2 Пример вычисления передаточных функций

Рассмотрим систему со структурной схемой, представленной на рисунке 10. В ней есть перекрещивающиеся связи, поэтому к ней нельзя сразу применить те способы получения передаточных функций, которые нам известны. Прежде всего, переставим два сумматора, которые находятся посередине. В результате исчезнут перекрещенные связи. Звенья W_1 и W_3 соединены параллельно и их передаточная функция равна $W_1 + W_3$. Для дальнейших

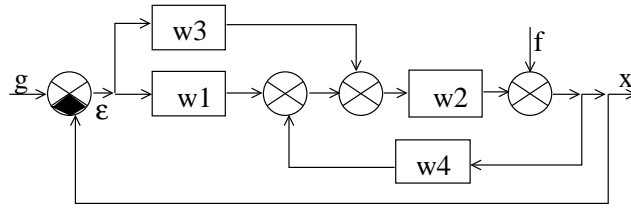


Рис. 10: Пример структурной схемы

действий полезно также поменять местами звено W_2 и сумматор, через который добавляется воздействие f . После такой перестановки можно вновь поменять местами сумматоры. В результате W_2 и W_4 могут быть объединены в одно звено с передаточной функцией $\frac{W_4}{1-W_2W_4}$. В итоге получим схему новую структурную схему. По этой структурной схеме

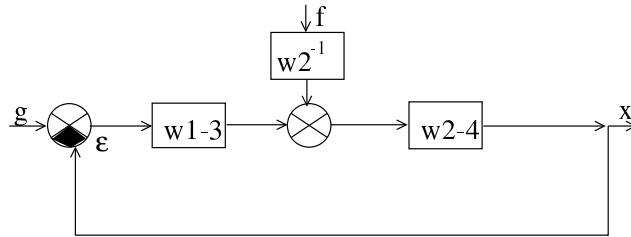


Рис. 11: Преобразованная структурная схема

можно вычислить различные передаточные функции. Самая простая из них — W_{gx} , для входного сигнала g и выходного x . Сигнал f в этом случае полагается равным 0.

$$W_{gx} = \frac{W_{1-3}W_{2-4}}{1 + W_{1-3}W_{2-4}}$$

Возможны и другие передаточные функции. Например выходным сигналом можно считать ϵ . Для вычисления передаточной функции $W_{g\epsilon}$ вновь полагаем f равным 0, а выход x просто отбрасываем. В результате получаем одноконтурную систему, у которой в обратной связи стоит звено с передаточной функцией $W_{1-3}W_{2-4}$. Поэтому

$$W_{g\epsilon} = \frac{1}{1 + W_{1-3}W_{2-4}}$$

Также возможен другой выбор входной величины. Функции W_{fx} и $W_{f\epsilon}$ получаются в результате рассмотрения систем с $g = 0$. В этом случае отрицательная обратная связь превращается просто в инвертор (то есть заменяет передаточную функцию W на $-W$).

Учитывая это, получаем, что

$$W_{fx} = \frac{W_2^{-1}W_{2-4}}{1 - W_{2-4}(-W_{1-3})} = \frac{W_2^{-1}W_{2-4}}{1 + W_{1-3}W_{2-4}}$$

Наконец,

$$W_{f\epsilon} = \frac{W_2^{-1}}{1 + W_{1-3}W_{2-4}}$$

5.3 Построение ЛАЧХ и ЛФЧХ для произвольной системы

К настоящему моменту мы можем построить передаточную функцию для системы с достаточно сложной структурной схемой. Покажем теперь, как строить ЛАЧХ и ЛФЧХ для системы со сложной передаточной функцией (то есть в случае, когда $W(s)$ не является элементарным звеном). Оказывается, в этом случае можно "собрать" ЛАЧХ и ЛФЧХ из соответствующих графиков для звеньев.

Рассмотрим передаточную функцию

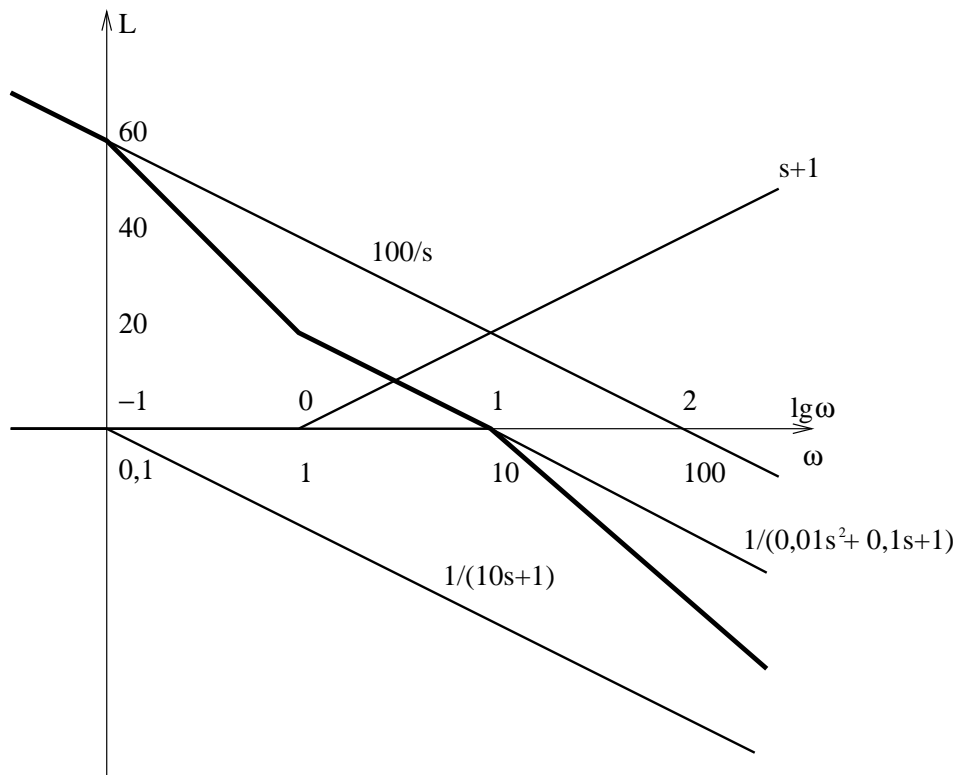
$$W(s) = \frac{100(s+1)}{s(10s+1)(0,01s^2+0,1s+1)}$$

Очевидно, что эта передаточная функция представляется в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев. Поэтому её ЛАЧХ строится как сумма ЛАЧХ соответствующих элементарных звеньев:

$$L(\omega) = 20 \lg 100 - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{(10\omega)^2 + 1} + 20 \lg \sqrt{\omega^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{(1 - 0,01\omega^2)^2 + (0,1\omega)^2}$$

Построение асимптотической ЛАЧХ вместо точной упрощает задачу, являясь при этом достаточно адекватной характеристикой системы, поэтому далее рассматривается построение именно асимптотической ЛАЧХ.

Для построения асимптотической ЛАЧХ системы, строим асимптотические ЛАЧХ для следующих звеньев: $\frac{100}{s}$, $(s+1)$, $\frac{1}{10s+1}$, $\frac{1}{0,01s^2+0,1s+1}$, а потом складываем их. Поскольку асимптоты линейны, достаточно вычислить суммы в точках сопрягающей частоты каждого звена, а между этими точками достроить график по линейности.

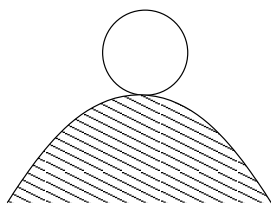


6 Лекция шестая

Устойчивость. Определение устойчивости по Ляпунову. Условия устойчивости линейных систем.

6.1 Интуитивное понимание устойчивости

В простейшем случае под устойчивостью системы понимают её способность возвращаться (с определённой точностью) в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели её из этого состояния.



Состояние равновесия само по себе не обязано быть устойчивым (например, шар на картинке находится в положении равновесия, но оно не устойчиво — если его "толкнуть", он уже больше в это положение не вернётся).

Однако и устойчивые положения равновесия бывают разными. Различают устойчивость "в малом", "в большом" и "в целом". Различия между устойчивостью "в большом" и "в целом" понять довольно легко: система устойчива "в целом", если она возвращается в положение равновесия при *любом* возмущении, и система устойчива "в большом", если известны границы устойчивости системы. Наконец, говорят, что система устойчива "в малом", если установлен факт устойчивости, но границы устойчивости не определены (в этом случае мы можем с уверенностью говорить только об устойчивости при бесконечно малых возмущениях). Различия между устойчивостью "в большом" и "в целом" представлены на рисунке 12.

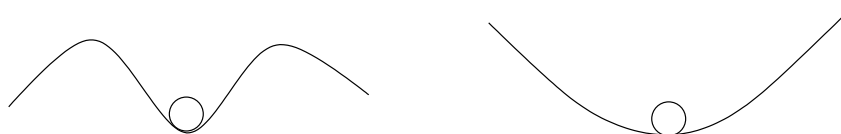
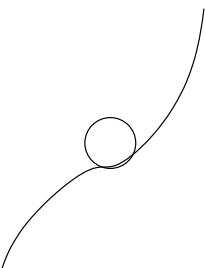


Рис. 12: Устойчивость "в большом" и "в целом".

Любая система, устойчивая "в большом" является устойчивой "в малом", а любая система, устойчивая "в целом" будет устойчива "в большом" с произвольными границами.

Кроме указанных случаев иногда выделяют ещё полу-устойчивые системы, в которых устойчивость зависит от "характера" внешних возмущений. Такой системой является, например, шар изображённый на рисунке: в зависимости от того, куда его "толкнут", он либо вернётся в положение равновесия, либо навсегда покинет его.



6.2 Математическое определение устойчивости

К сожалению, не все системы так наглядны, как катающийся шарик. Более того, зачастую физические системы описываются уравнениями, а вовсе не картинками (в частности, системы автоматического управления). Наконец, используя аналогии с картинками не вполне понятно, как определить, что такое устойчивое (или неустойчивое) движение. Для таких систем хотелось бы тоже иметь способ определять, является ли система устойчивой или нет.

Для того, чтобы говорить об устойчивости системы, необходимо понимать, что для этой системы является положением равновесия (невозмущённым состоянием), какие могут быть возмущения, и что понимать под фразой "способность возвращаться (с определённой точностью) в положение равновесия".

Будем считать, что система характеризуется некоторым набором величин, зависящих от времени $y_i(t)$. Вообще говоря, такая величина может быть всего одна; в случае САУ такой величиной является, например выходной сигнал (хотя можно исследовать и устойчивость САУ по другим величинам).

Пусть невозмущённому состоянию соответствуют функции $y_i^0(t)$ (о том, что такое невозмущённое состояние САУ несколько позже). Тогда можно рассматривать *отклонения* системы от невозмущённого состояния:

$$x_i(t) = y_i(t) - y_i^0(t)$$

Значения $x_i(t)$ при $t = 0$ называются возмущениями.

Используя введённые обозначения можно дать математическое определение устойчивости. Впервые оно было сформулировано А.М. Ляпуновым в 1892 году и оказалось настолько удачным, что зачастую используется и по сей день без существенных изменений.

Итак, по Ляпунову, невозмущённое движение называется устойчивым по отношению к переменным x_i если для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ можно найти такое $\delta(\epsilon)$, что для всяких $x_i(0)$ (возмущений), удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^n (x_i(0))^2 \leq \delta$$

$x_i(t)$ таковы, что в любой момент времени $t \geq t_0$ выполнено

$$\sum_{i=1}^n x_i(t) < \epsilon$$

В противном случае невозмущённое движение неустойчиво.

6.3 Геометрическая интерпретация

Содержащиеся в определении устойчивости формулы допускают геометрическую интерпретацию. Как легко заметить, суммы квадратов x_i суть квадраты длин вектора x (в разные моменты времени). Если считать, что x_i описывают движение точки в пространстве, то условие устойчивости становится некоторой особенностью этого движения. Невозмущённому состоянию соответствует точка начала координат.

Тогда устойчивость можно понимать так: если выбрать какой-то шар радиуса $\sqrt{\epsilon}$ вокруг начала координат, то всегда можно выбрать другой шар (радиуса $\sqrt{\delta}$), такой, что где бы внутри него мы не начали движение, мы, начиная с некоторого момента будем постоянно находиться внутри первого шара.

6.4 Свойства определения

На самом деле, исследуемые нами системы достаточно просты, и поэтому условием устойчивости можно считать следующее: при достаточно малых возмущениях движение будет

сколь угодно мало отличаться от невозмущённого; или, в терминах функций $x_i(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$$

При всём своём удобстве и простоте, определение устойчивости по Ляпунову имеет некоторые ограничения. А именно, во-первых, предполагается, что возмущения возможны только в начальных условиях (то есть для возмущённого движения все внешние факторы/силы остаются теми же, что и для невозмущённого). Во-вторых, устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени.

6.5 Применение условия устойчивости к САУ

Математической моделью САУ для нас является дифференциальное уравнение вида

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m)g(t)$$

(где a_i, b_i постоянные). Величина $g(t)$ задана (управляющее воздействие), величина $x(t)$ искомая и описывает поведение системы.

Известно, что решение такого уравнения представляется в виде

$$x(t) = x_{\text{общ}}(t) + x_{\text{част.}}(t)$$

где частное решение определяется функцией $g(t)$, а общее получается из однородного уравнения.

При создании системы автоматического управления стараются получить изменение величины $x(t)$ в соответствии с управляющим воздействием, а возмущение $x(t)$ — это отклонение от такого поведения. Преобразовав предыдущее равенство, заметим, что

$$x_{\text{общ}}(t) = x(t) - x_{\text{част.}}(t)$$

То есть всякое возмущение является решением однородного уравнения (и наоборот). Итак, при исследовании устойчивости САУ за *невозмущённое* состояние принимается вунужденная составляющая решения (определяемая функцией $g(t)$), а возмущения являются решениями однородного уравнения, получаемого из уравнения, описывающего САУ.

Возмущения в данном случае — это начальные условия, при которых решается однородное уравнение. Для обеспечения устойчивости требуется, чтобы при любых начальных условиях решение уравнения $x_{\text{общ}}(t)$ стремилось к нулю при стремлении t к бесконечности.

В проверке этого условия и заключается исследование устойчивости системы управления.

7 Лекция седьмая

Алгебраические критерии устойчивости Рауса, Гурвица, Лъенара-Шипара.

7.1 Устойчивость решений и коэффициенты уравнения

Из общей теории дифференциальных уравнений известно, что всякое решение уравнения

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} x(t) + \dots + a_n x(t) = 0$$

представляется в виде суммы функций вида $Ce^{\lambda t}$ (величина C определяется по начальным условиям). Если такую функцию подставить в дифференциальное уравнение, то получим условие на величину λ :

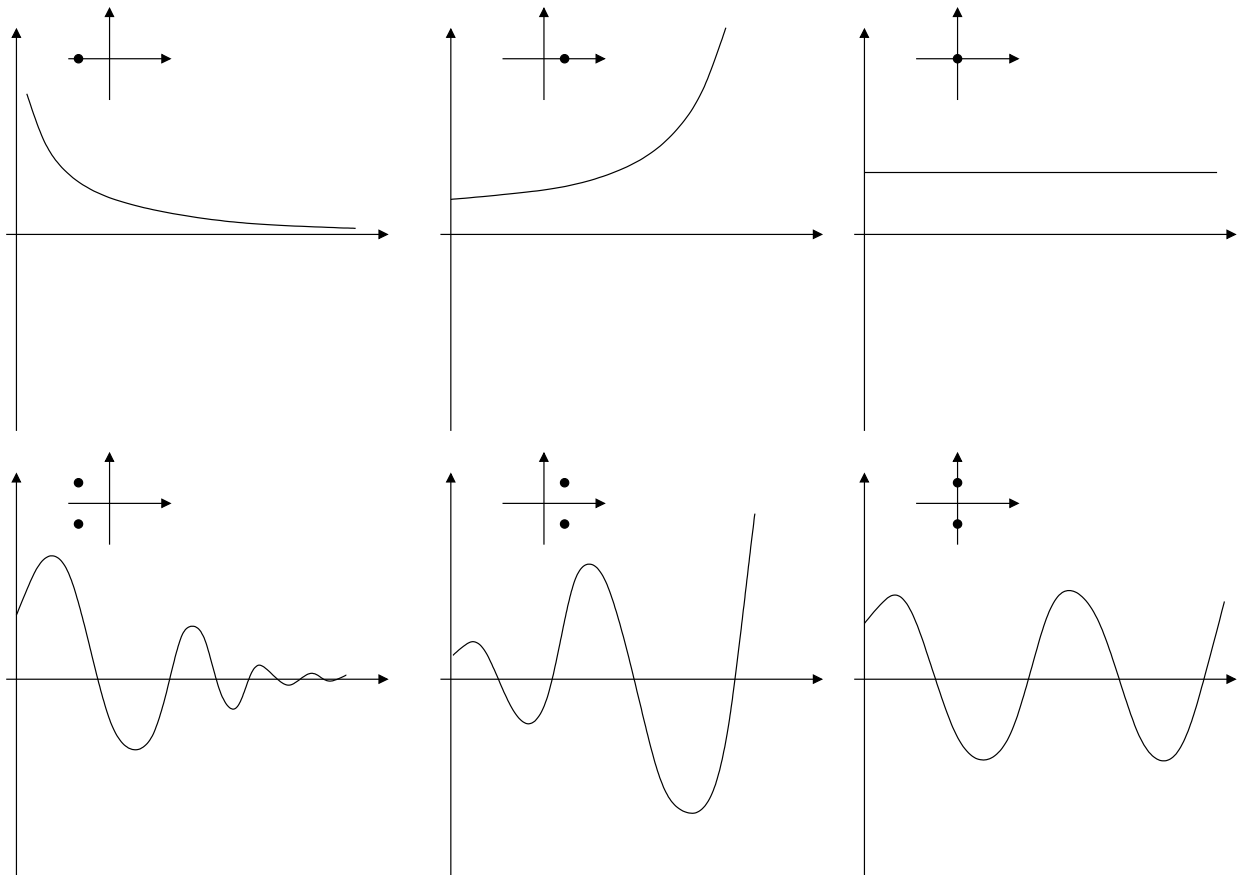
$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Это уравнение называется характеристическим, а его корни $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ будут определять характер решения (то есть переходного процесса в системе). Такое уравнение имеет ровно n (возможно комплексных, возможно кратных) корней. Каждый такой корень представим в виде

$$\lambda_i = \alpha_i \pm j\beta_i$$

и соответствует решению $Ce^{\lambda_i t} = Ce^{\alpha_i t}(\cos \beta_i t + j \sin \beta_i t)$. Корни, у которых $\alpha_i > 0$ называют "правыми", а те, у которых $\alpha_i < 0$ — "левыми".

При разных "типах" корней λ решение $x(t)$ ведёт себя существенно различным образом.



Из построенных графиков видно (вообще это можно показать и без графиков), что для устойчивости системы при любых начальных условиях требуется, чтобы все корни были "левыми" (это же условие является достаточным). Таким образом, проверка устойчивости заключается в том, чтобы найти корни характеристического уравнения и проверить, являются ли они все "левыми" или нет; если нет, то система неустойчива. Однако, здесь-то и кроется основная проблема. Дело в том, что для уравнений выше второй степени нахождение корней в общем случае весьма и весьма проблематично, а для степеней выше 4 так и просто невозможно.

Поэтому особую роль играют методы, позволяющие судить о корнях уравнения, не вычисляя их. Это так называемые *алгебраические критерии устойчивости*.

7.2 Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии устойчивости позволяют судить о наличии правых корней уравнения, не находя эти корни, а вычисляя какие-то функции от коэффициентов. Наибольшее распространение получили критерии Рауса и Гурвица. Первый из критериев представлял собой некоторый алгоритм, зависящий от коэффициентов уравнения, позволяющий в результате вычислений сделать выводы о корнях уравнения. Однако этот алгоритм сложен для запоминания и использования, поэтому здесь рассматриваться не будет.

Более удобным в применении является критерий Гурвица. Для его формулировки вводится определитель Гурвица, составленный из коэффициентов уравнения следующим образом:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

На главной диагонали выписываются коэффициенты уравнения от a_1 до a_n . После этого в каждом столбце дописываются вниз коэффициенты с убывающими номерами, а вверх — с возрастающими. Если коэффициента с каким-то номером не существует, вместо него пишется ноль.

Из этого определителя выделяются также диагональные миноры (определители Гурвица более низких порядков), а именно:

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots$$

Критерий устойчивости Гурвица формулируется следующим образом: для того, чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знак, одинаковый с первым коэффициентом характеристического уравнения a_0 .

Так как a_0 всегда можно сделать положительным, то можно записать критерий Гурвица как $\Delta_i > 0$.

Критерий Гурвица является необходимым и достаточным. Однако есть полезный критерий (настолько простой, что он является безымянным), дающий необходимое условие устойчивости. Если система устойчива, то у характеристического уравнения все коэффициенты больше нуля (точнее имеют один знак, но, как было замечено ранее, это не столь существенно). В случае выполнения этого необходимого условия, критерий Гурвица можно упростить. Это упрощение носит название критерия Лъенара-Шипара и формулируется следующим образом: необходимым и достаточным условием устойчивости является положительность всех чётных (или всех нечётных) определителей Гурвица.

8 Лекция восьмая

Частотный критерий Михайлова, Найквиста.

8.1 Устойчивость и геометрия комплексной плоскости

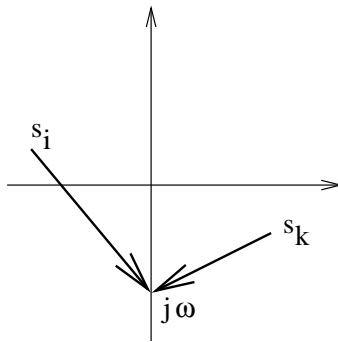
Используя комплексную плоскость для отображения "поведения" характеристического многочлена, можно сформулировать "графические" критерии устойчивости. Итак, пусть дан характеристический многочлен

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

На множестве комплексных чисел этот многочлен всегда раскладывается в произведение n многочленов первой степени. То есть, можно записать:

$$D(s) = a_0 (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)$$

где s_i суть (комплексные) числа, которые, как известно, можно изображать точками на плоскости. С другой стороны, их можно считать и векторами на плоскости. Из такого представления становится понятно что, комплексное число можно задать его модулем и аргументом ($z = |z|e^{j \arg z}$), причём функция $\arg z$ обладает следующим свойством: $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ (при перемножении двух комплексных чисел их аргументы складываются). Считается что аргумент увеличивается при движении против часовой стрелки.



Возьмём в качестве s число $j\omega$ (лежащее на мнимой оси). Каждая из скобок будет иметь вид $(j\omega - s_i)$. Рассмотрим теперь то, как ведёт себя такая скобка при изменении ω от $-\infty$ до ∞ . Если корень правый, то аргумент скобки будет меняться от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то есть приращение аргумента будет равно $-\pi$. Если же корень левый, аргумент будет меняться от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а значит приращение аргумента будет равно π .

Рассмотрим теперь приращение аргумента всего многочлена $D(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ . Пусть у многочлена m правых корней и $n - m$ левых. Тогда

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi(n - m) + (-\pi)m = \pi(n - 2m)$$

На самом деле, достаточно рассматривать изменение ω от 0 до ∞ . Можно показать, что в этом случае выполняется:

$$\Delta \arg D(j\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}(n - 2m)$$

Основываясь на этом свойстве, можно формулировать критерии устойчивости.

8.2 Критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова формулируется как прямое следствие сформулированного выше свойства приращения аргумента характеристического многочлена.

Рассмотрим $D(j\omega)$ как кривую на комплексной плоскости (годограф Михайлова):

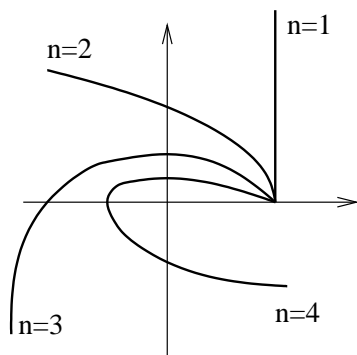
$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n = U(\omega) + jV(\omega) = D(\omega)e^{j\tau(\omega)}$$

По этой кривой можно судить о приращении аргумента характеристического многочлена. Для того, чтобы система была устойчивой требуется, чтобы у неё не было правых корней,

то есть $m = 0$. Следовательно, необходимо, чтобы $\Delta \arg D(j\omega) = \frac{\pi}{2}n$. Кроме того, требуется чтобы у многочлена не было чисто мнимых корней, а значит должно выполняться

$$D(j\omega) \neq 0$$

Переформулируя эти два условия, можно сказать, что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова обходил на комплексной плоскости против часовой стрелки ровно n квадрантов подряд и нигде не обращался в 0.



Как легко заметить, у устойчивой системы все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Следовательно, годограф Михайлова начинается на положительной части вещественной оси. Кривые устойчивых систем различных порядков приведены на рисунке.

В случае, когда кривая ведёт себя иным образом (начинается не на положительной полуоси, обходит квадранты не по порядку, обращается в ноль), система является неустойчивой. Если кривая проходит через ноль, то небольшие изменения системы могут сделать её устойчивой: в таких случаях говорят, что система находится на границе устойчивости (аперiodической или колебательной).

Рассматривая вещественную и мнимую части кривой Михайлова $U(\omega)$ и $V(\omega)$, можно сформулировать критерий устойчивости следующим образом: $U(\omega)$ и $V(\omega)$ должны иметь вместе n действительных корней и эти корни должны перемежаться на действительной оси, а при $\omega = 0$: $U(0) > 0, V(0) = 0$.

8.3 Критерий устойчивости Найквиста

Критерий устойчивости Найквиста позволяет судить об устойчивости *замкнутой* системы по амплитудно-фазовой характеристике *разомкнутой* системы. Пусть передаточная функция разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}$$

при этом можно считать, что степень многочлена $R(s)$ не больше степени $Q(s)$. Ее амплитудно-фазовая характеристика получается как кривая $W(j\omega)$. При этом достаточно рассматривать только неотрицательные значения ω , так как часть кривой, получающаяся для отрицательных ω может быть получена симметричным (относительно действительной оси) отражением положительной части кривой.

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{R(s)}{Q(s)} \frac{1}{1 + \frac{R(s)}{Q(s)}} = \frac{R(s)}{Q(s) + R(s)}$$

Характеристический многочлен замкнутой системы равен $Q(s) + R(s)$ (обозначим его $D(s)$), а характеристический многочлен разомкнутой системы — $Q(s)$.

Рассмотрим $\phi(s) = \frac{D(s)}{Q(s)}$. Легко проверить, что $\phi(s) = 1 + W(s)$. В силу предположения о степени многочлена $R(s)$, степени $D(s)$ и $Q(s)$ совпадают и равны n . Пусть у $D(s)$ имеется m правых корней, а у $Q(s)$ — l правых корней.

Тогда, с одной стороны,

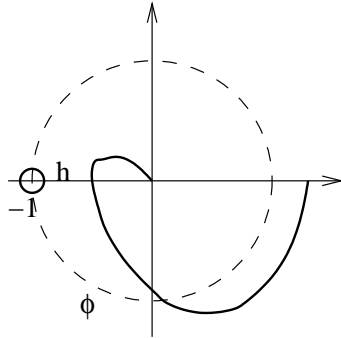
$$\Delta \arg \phi(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \Delta \arg(1 + W(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty}$$

а с другой стороны,

$$\Delta \arg \phi(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi(n - m - m) - \pi(n - l - l) = 2\pi(l - m)$$

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы $m = 0$. Поэтому вектор $1 + W(j\omega)$ должен совершать вокруг начала координат ровно l полных оборотов, где l — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Возвращаясь к рассмотрению именно вектора $W(j\omega)$ (а не $1 + W(j\omega)$) заметим, что обходы начала координат для него соответствуют обходам точки $(-1, j0)$.



Если разомкнутая система была устойчива (то есть, $l = 0$), то условием устойчивости замкнутой системы будет то, что АФЧХ разомкнутой системы *не* должна охватывать точку $(-1, j0)$.

Для устойчивых систем большое значение имеет то, насколько они далеки от неустойчивого состояния, так называемый запас устойчивости. Говорят о запасе устойчивости по амплитуде и запасе устойчивости по фазе. Запасом по амплитуде называют длину отрезка между точкой пересечения АФЧХ с действительной осью и точкой $(-1, j0)$. Запас по фазе определяется как угол между действительной осью и вектором точки, в которой модуль АФЧХ равен 1.

9 Лекция девятая

Анализ устойчивости по логарифмическим характеристикам. Структурная устойчивость. Пример анализа системы

9.1 Анализ устойчивости по ЛАЧХ и ЛФЧХ

Критерий Найквиста может быть перенесен на логарифмические характеристики разомкнутой системы. Для анализа устойчивости существенными являются только те значения ω , при которых $L(\omega) > 0$ (в противном случае АФЧХ не может охватывать точку $(-1, j0)$, так как лежит внутри единичного круга с центром в начале координат). Количество охватов точки -1 может быть вычислена как количество переходов через вещественную ось при $L(\omega) > 0$ (кстати, запас по фазе — это значение ФЧХ в точке, где ЛАЧХ обращается в 0). Переходам АФЧХ через действительную ось соответствуют переходы ЛФЧХ через прямые $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$. Переход называется положительным, если прямая пересекается снизу вверх и отрицательным, если сверху вниз.

Замкнутая система устойчива, если для ЛФЧХ разомкнутой системы при изменении ω от 0 до ∞ разность между количеством положительных и отрицательных переходов равна $\frac{l}{2}$, где l — число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Из ФЧХ можно получить и запас по амплитуде — это значение амплитуды в точках, где ФЧХ проходит через прямые $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$

9.2 Структурная устойчивость системы

Изменение параметров системы влияет на её устойчивость. Однако возможны случаи, когда независимо от значений параметров разомкнутой системы, замкнутая оказывается устойчивой. Этот случай называется структурной устойчивостью и возникает, когда $\phi < -\pi$, то есть ФЧХ принципиально не может охватить точку $(-1, j0)$.

Кроме структурно устойчивых систем возможны также структурно неустойчивые системы, в которых никакое изменение параметров не приводит к устойчивой системе.

9.3 Пример анализа системы

Пусть дан объект (электродвигатель постоянного тока) с передаточной функцией

$$W_O = \frac{3}{0.001s^2 + 0.1s + 1}$$

Используется датчик (тахогенератор) с передаточной функцией

$$W_d = \frac{0,33}{0.01s + 1}$$

Требуется определить границы значения коэффициента (k) усиления пропорционального регулятора из условия устойчивости.

Передаточная функция разомкнутой системы будет иметь вид

$$W(s) = \frac{k}{(0.001s^2 + 0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

Отсюда получим, что передаточная функция замкнутой системы равна

$$W_{\text{зам}}(s) = \frac{k}{k + 0.0001s^3 + 0.002s^2 + 0.11s + 1}$$

Следовательно, характеристический многочлен системы есть

$$0.0001\lambda^3 + 0.002\lambda^2 + 0.11\lambda + k + 1$$

Составим определитель Гурвица из коэффициентов уравнения

$$\begin{vmatrix} 0.002 & k + 1 & 0 \\ 0.0001 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0.002 & k + 1 \end{vmatrix}$$

Воспользуемся критерием Лъенара-Шипара. Достаточно проверить только второй минор Δ_2 . То есть, условие устойчивости системы есть $0.002 \cdot 0.11 - 0.0001(k + 1) > 0$. Отсюда $k + 1 < 2.2$, а значит $k < 1.2$.

10 Лекция десятая

Показатели качества управления. Оценка точности управления в установившемся режиме (коэффициенты ошибок)

10.1 Оценка качества переходного процесса при воздействии ступенчатой функции

Устойчивость системы управления — не единственное условие её работоспособности. Существуют и другие показатели (характеризующие переходный процесс), которые описывают поведение системы в зависимости от управляющего воздействия. Эти величины называют прямыми показателями качества.

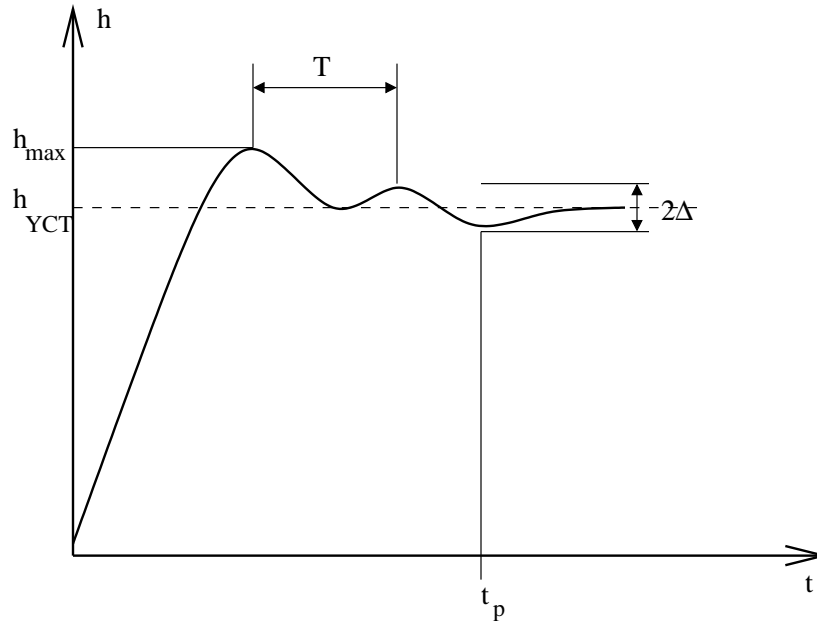


Рис. 13: Прямые показатели качества

К прямым оценкам качества относят:

1. Время регулирования (t_p): минимальное время, за которое регулируемая величина приближается к своему установившемуся значению с точностью Δ . То есть $|h(t) - h_{уст}| \leq \Delta$. Величина Δ оговаривается заранее.
2. Перерегулирование σ : максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения. Выражается в процентах:

$$\sigma\% = \frac{h_{max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%$$

где h_{max} есть значение первого максимума.

3. Частота колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период колебаний.
4. Число колебаний переходной характеристики.
5. Время достижения первого максимума.
6. Время нарастания переходного процесса — минимальное время, за которое переходная характеристика пересекает уровень установившегося значения.

Для специфических систем возможно рассмотрение и других показателей качества. В зависимости от системы определяются допустимые значения показателей качества. Так, например, перерегулирование, зачастую, не должно превышать 10 – 30%, в некоторых системах допускается до 70%, а есть системы, в которых перерегулирование вообще не допустимо. Число допускаемых колебаний может варьироваться, в зависимости от системы, от 0 до 4.

10.2 Оценка точности управления в установившемся режиме (коэффициенты ошибок)

Целью управления является обеспечение того, чтобы управляемая величина вела себя так, как предписывает закон управления $g(t)$. Поэтому, кроме уже перечисленных показателей качества, важную роль играет то, насколько точно приближается выходной сигнал к закону управления.

Если показатели качества характеризуют поведение системы до установившегося режима, то точность управления оценивается для установившегося режима. Пусть $\epsilon(t)$ есть ошибка управления в установившемся режиме.

$$\epsilon(t) = g(t) - x_{\text{вых}}(t)$$

Для бесконечно-дифференцируемой функции $g(t)$ функцию $\epsilon(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\epsilon(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{d}{dt} g(t) + \frac{1}{2!} C_2 \frac{d^2}{dt^2} g(t) + \dots + \frac{1}{m!} C_m \frac{d^m}{dt^m} g(t) + \dots$$

Коэффициенты C_0, C_1, C_2, \dots называются коэффициентами ошибок. В частности, коэффициент C_0 есть установившееся значение ошибки (статической). Коэффициенты ошибок могут быть получены из описания системы управления в изображениях Лапласа. Рассмотрим передаточную функцию $W_{g\epsilon}(s)$. Обозначая изображение $\epsilon(t)$ через $E(s)$, а $g(t)$ через $G(s)$, соответственно, можем записать

$$E(s) = W_{g\epsilon}(s)G(s)$$

Если $W(s)$ передаточная функция разомкнутой системы, то $W_{g\epsilon}(s) = \frac{1}{1+W(s)}$. Для этой дроби также можно записать разложение в ряд:

$$E(s) = [C_0 + C_1 s + \frac{C_2}{2!} s^2 + \dots + \frac{C_m}{m!} s^m + \dots] G(s)$$

Если в этом представлении перейти от изображений к оригиналам, то получим исходное разложение функции $\epsilon(t)$. А значит, коэффициенты в разложениях совпадают. Поэтому для их вычисления можно воспользоваться формулами:

$$C_0 = [W_{g\epsilon}(s)]|_{s=0}, \dots, C_m = \left[\frac{d^m W_{g\epsilon}(s)}{ds^m} \right] |_{s=0}$$

В соответствии с первой формулой, статическая ошибка системы равна $W_{g\epsilon}(0)$.